DEVOIR DE SYNTHESE N°1

EXERCICE N°1 : 10' 3 points

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

1°) Si u la suite définie sur IN^* par $u_n=\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^k\frac{k}{3^k}\right)$ alors :

a) $u_3=-\frac{2}{9}$.

b) La suite (u_{2n}) est croissante.

2°) La suite v définie sur IN par $v_n=\frac{(-1)^n n+1}{2n+(-1)^n}$ est convergente.

3°) Les suites u et v définies sur IN^* par $u_n=1+\frac{1}{n}$ et $v_n=1-\frac{3}{n^2}$ sont adjacentes.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

1°) On considère, dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E):z^2-\sqrt{2}(1-i)z-4i=0$

a) Montrer que le discriminant Δ de l'équation (E) est égal à $6(1+i)^2$.

b) Résoudre l'équation (E)

2°) Soit $E_\theta : z^2-2e^{i\theta}z+4e^{2i\theta}=0$ où $\theta\in]0,\pi[$.

Vérifier que $z_1=e^{i\theta}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ est une solution de (E_θ) En déduire l'autre solution z_2.

3°) a) En déduire une écriture exponentielle de chacune des solutions de l'équation (E).

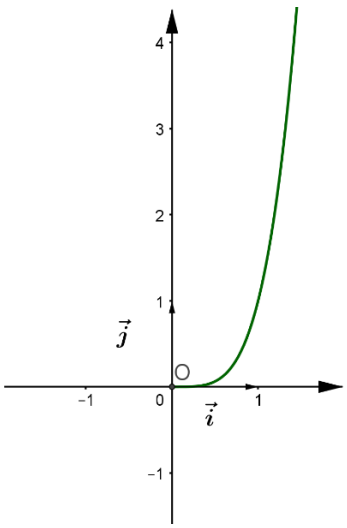
b) Déterminer alors la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$.

4°) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E'): $z^4=1+i\sqrt{3}$.

b) On a tracé sur le graphique au-dessous la courbe $\Gamma : y=x^4$ pour $x\geq 0$.

Construire alors, sur le même graphique, les points images de toutes les solutions de (E').



EXERCICE N°3 :	35'	6 points	

Soit g la fonction définie et **deux fois dérivable** sur IR ainsi que le tableau de variation de la fonction g' dérivée de g. On admet que $|g''(x)| < \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		4		5		6		$+\infty$
$g''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$g'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

1°) a) Déterminer le tableau de signe de g'.

b) Par une lecture du tableau de variation, déterminer, s'ils existent, les points d'inflexion de la courbe de g (en justifiant).

2°) • Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x}$.

• Soit h la fonction définie sur $]-\infty,5]$ par : $h(x) = f \circ g'(x)$.

• La courbe de h admet un point d'intersection avec la droite d'équation $y = x$ d'abscisse $\alpha \in [-1,4]$.

a) Montrer que h est dérivable sur $]-\infty, 5]$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$ et $h(5)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]-\infty,5]$, $h'(x) = g''(x)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{g'(x)}}\right)$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

e) Montrer que $|h'(x)| < \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [-1,4]$.

3°) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $-1 \le u_n \le 4$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

c) En déduire que pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \le \frac{1}{2^{n-2}}$.

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

e) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5 sachant que $u_4 = 1,2$.

EXERCICE N°4 :	30'	5 points	

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$.

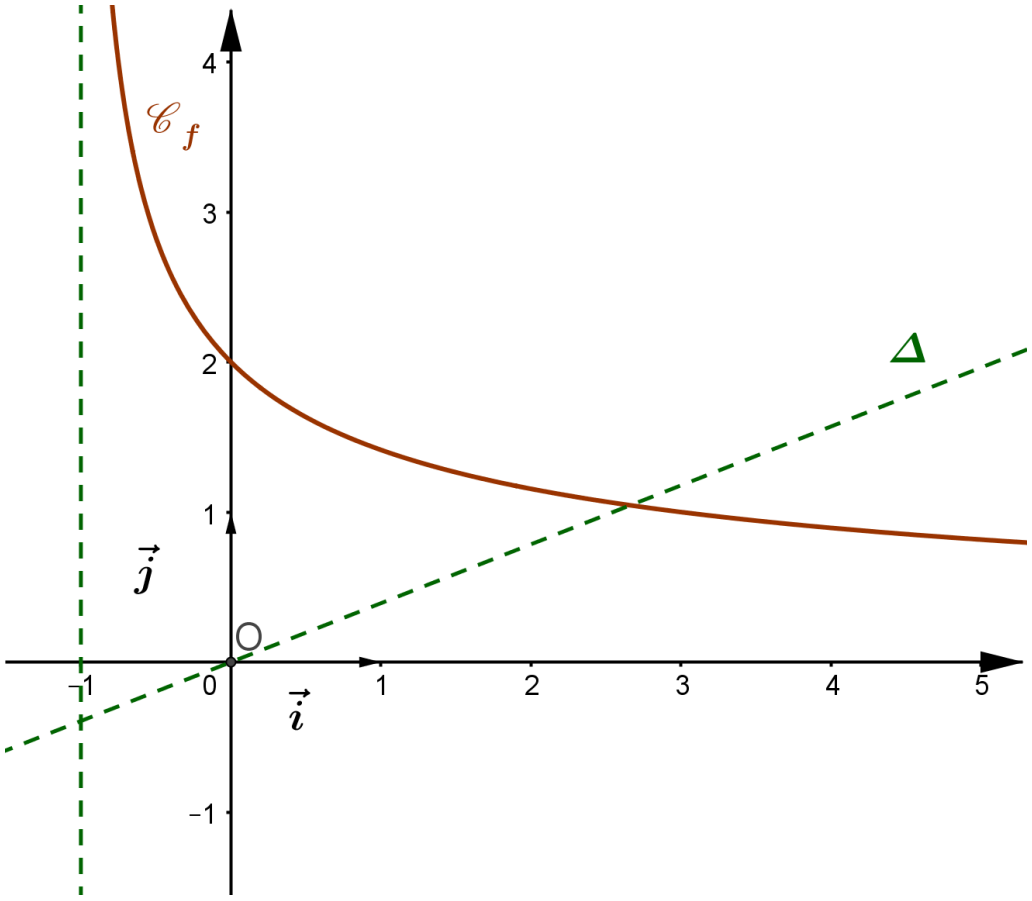
$\mathscr{C}_f$ étant sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1°) a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que pour tout $x>-1$, $f'(x)=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2°) On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta : y=\dfrac{\pi}{8}x$.

Placer sur l'axe $(O,\vec{i})$ le réel α abscisse du point de $\mathscr{C}_f$ d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$.



3°) Soit g la fonction définie sur $[0,3]$ par $g(x)=\sin(\pi f(x))$.

$\mathscr{C}_g$ étant sa courbe représentative dans le même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que g est dérivable sur $[0,3]$ et calculer $g'(x)$.

b) Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) Utiliser la droite Δ pour construire les demi-tangentes à $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisses 0 et 3.

e) Tracer $\mathscr{C}_g$.

Tél : +216 29 862 229 / +216 29 862 464 - Email : contact@takiacademy.com